УДК 330.45

Клевец Николай Иванович,
к.т.н., доцент,
кафедра системного анализа и информатизации,
Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского,
г. Симферополь.

Klevets Nickolay Ivanovich,
Ph. D., associate professor,
Department of System Analysis and Information Technologies,
V.I. Vernadsky Crimean Federal University,
Simferopol.

ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСОВ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

OPTIMAL RESOURCE DISTRIBUTION UNDER UNCERTAINTY

Описан нечетко-множественный подход к решению задачи оптимального распределения ресурсов в условиях неопределенности. Для решения нечетко поставленной задачи математического программирования применяется метаэвристический алгоритм оптимизации. Приведен пример решения задачи.

Ключевые слова: математическое программирование, нечеткие условия, распределение ресурсов, метаэвристическая оптимизация, функция принадлежности.

The fuzzy-set approach to solving the problem of optimal resource distribution under uncertainty is described. To solve the problem of fuzzy mathematical programming the metaheuristic optimization algorithm is used. The example of the problem solution is given.

Keywords: mathematical programming, fuzzy conditions, resources distribution, metaheuristic optimization, membership function.

ВВЕДЕНИЕ

Распределение ограниченных ресурсов является рутинной работой управляющего. Однако эта задача часто бывает плохо структурированной вследствие того, что невозможно точно предсказать на период планирования деятельности предприятия поведения окружающей среды и конъюнктуры рынка. Таким образом, задача оптимального распределения ресурсов (ЗОРР) должна рассматриваться как задача нечеткого математического программирования (ЗНМП). На концептуальном уровне методика решения ЗНМП хорошо разработана [4,5]. Однако существующее коммерческое программное обеспечение, предназначенное для решения широкого круга таких задач, требует высокой квалификации пользователя и не позволяет решать ЗНМП [3]. Специализированного коммерческого программного обеспечения, использующего нечетко-множественный подход для решения задачи оптимального распределения ресурсов и не требующего специальной подготовки пользователя, пока нет. Это, по-видимому, связано с необходимостью эффективного решения нелинейной многокритериальной задачи многих переменных. В связи с этим актуальной является задача разработки специализированного программного обеспечения, реализующего методику решения ЗНМП.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Задача оптимального распределения ресурсов в условиях неопределенности ставится следующим образом: известны приблизительные значения запасов ресурсов, приблизительное (желательное) или минимально допустимое значение целевой функции (ЦФ), как правило описывающей уровень полезности, получаемой предприятием от использования ресурсов. В этих условиях необходимо распределить ресурсы таким образом, чтобы получить минимально допустимое, или превосходящее его, значение ЦФ. Отметим, что такая постановка задачи характерна для реальной хозяйственной деятельности предприятия.

Цель исследования — разработка методики решения ЗОРР в условиях неопределенности и соответствующего программного обеспечения доступного пользователям средней квалификации.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Согласно подходу Беллмана-Заде [4, 5], задача математического программирования в нечеткой постановке сводится к максимизации пересечения множества функций принадлежности (ФП) системы ограничений и множества функций предпочтения для целевых функций задачи.

Очевидно, что в реальной ситуации коэффициенты ЦФ, элементы технологической матрицы и элементы вектора запасов ресурсов являются нечетким числами. Это приводит к тому, что экстремум целевой функции будет нечетким числом. Система ограничений на ресурсы также будет выполняться неточно. Поэтому на следующем шаге задачи оптимального распределения ресурсов необходимо выполнить фаззификацию ЦФ и системы ограничений. Для этого, во-первых, нужно, исходя из имеющихся наблюдений (оценочных расчетов, интуитивных соображений лица, принимающего решение (ЛПР), и т.п.), указать разумное желательное значение ЦФ. Во-вторых, выбрать тип функции предпочтения для ЦФ и настроить ее параметры, так чтобы она, с точки зрения ЛПР, адекватно описывала поведение ЦФ в области допустимых решений. Так как, желаемое значение ЦФ обычно выражается в виде некоторого числа или одностороннего неравенства, в окрестности которого должен быть экстремум ЦФ или превышать это число, то для ЦФ наиболее часто используют функции предпочтения (принадлежности) П-образного (графики 2-4 на рис. 1) и S-образного типа (графики 1, 5 на рис. 1), либо их кусочно-линейные аналоги. В случае решения ЗНМП на максимум ЦФ, используют ФП, показанную на рис. 1 под номером 1, в случае минимума ЦФ — под номером 5. Тоже относится к неравенствам и связям системы ограничений. Функции 2-4 используют, когда необходимо получить более точное значение ЦФ и при жестких ограничениях на ресурсы.

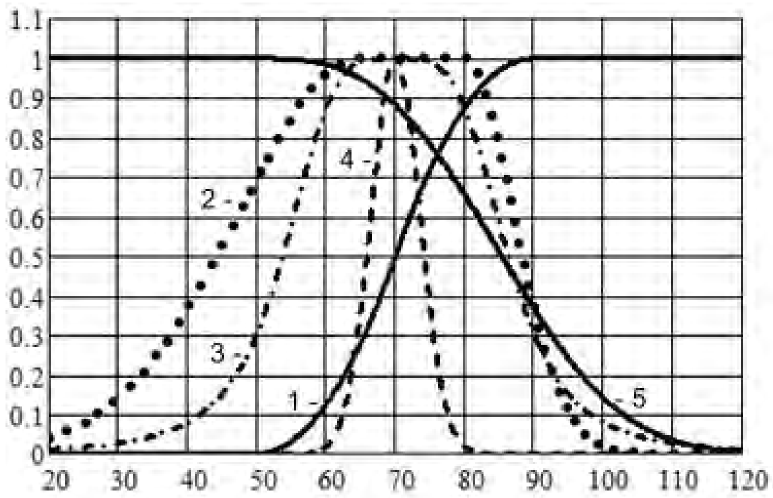

Рис. 1. Варианты функций принадлежности (Построено автором)

Максимизируемый функционал ЗНМП представляет собой пересечение функций принадлежности ЦФ и системы ограничений [4, 5], которое записывается следующим образом:

$$\min_{X\in U}(\mu_{G_1},...,\mu_{G_n},\mu_{C_1}...,\mu_{C_m}), \qquad (1)$$

где μ_{G_i} — ФП *i*-й целевой функции задачи; μ_{C_j} — ФП j-го ограничения задачи; n, m — количество целевых функций и ограничений задачи, соответственно.

Правая часть (1) вычисляется как минимум из всех ФП, при заданном X. При этом, для ФП в (1) можно задать весовые коэффициенты в виде множителей или степеней, для которых должно выполняться равенство $\sum_i w_i = 1$. Для решения ЗНМП необходимо найти вектор X, максимизирующий (1).

Нечетко-множественный подход к решению задачи оптимального распределения ресурсов имеет свои достоинства и недостатки. *Достоинства*: более адекватен реальным условиям, универсален, нет различия между ЦФ и ограничениями (решает многокритериальные задачи), легко поставить ЗМП, используя нечеткие рассуждения (данные), задача на минимум ЦФ отличается от задачи на максимум ЦФ только функциями принадлежности, можно использовать весовые коэффициенты для функций принадлежности, чтобы ранжировать ЦФ и ограничения по значимости (важности). *Недостатки*: необходимо решать задачу нелинейного программирования со всем вытекающими проблемами (мультимодальность, невыпуклость, большой объем вычислений, сложные алгоритмы поиска глобального экстремума).

Пересечение функций принадлежности (1) может иметь сложный рельеф в многомерном пространстве, что приведет к проблемам при максимизации (1). Обычно системы поддержки принятия решений, решающие задачи оптимального распределения ресурсов, содержат несколько процедур поиска экстремума функции многих переменных. При этом, приходится настраивать параметры процедур под каждую задачу. Для эффективной настройки процедур оптимизации необходимы специальные знания и опыт. А именно этого и не хватает пользователям подобных программ. Применение метаэвристического алгоритма поиска экстремума функции многих переменных [1, 2], который эффективно работает при поиске экстремума любых функций, освобождает пользователя от необходимости настройки параметров процедур оптимизации.

Методика решения ЗОРР в условиях неопределённости состоит из следующих этапов:

1. Содержательная постановка задачи с выделением одной или нескольких целевых функций и системы ограничений.
2. Определение граничных значений для распределяемых ресурсов (области допустимых решений — ОДР) и минимального (максимального) значения целевых функций.
3. Выбор ФП для целевых функций и системы ограничений (фаззификация задачи) с учетом предельных (предпочтительных) значений параметров задачи, полученных в п. 2.
4. Формирование исследуемой на экстремум функции многих переменных (1), представляющую собой пересечение множества ФП, полученных в п. 3.
5. Исследование на максимум функции, полученной в п. 4, в ОДР (решение ЗНМП).
6. Содержательная интерпретация результатов решения задачи пункта 5.

При выборе метода оптимизации, используемого в программе, был протестирован на реальных задачах ряд современных методов метаэвристической оптимизации [1,2]. Расчеты показали, что наиболее эффективным является метод дифференциальной эволюции [2], т.к. он требует наименьшего количества входных параметров и находит глобальный экстремум ЦФ за наименьшее время.

Предложенная методика решения ЗНМП реализована в системе автоматизированных вычислений Mathcad. При этом набор ФП, показанных на рис. 1, и метаэвристический алгоритм поиска глобального экстремума функционала (1) выполнены в виде отдельных модулей, что позволяет использовать подпрограмму, как «черный ящик» без дополнительной настройки параметров под конкретную задачу. Таким образом, программа может использоваться не только в прикладных исследованиях, но и в учебном процессе студентами второго курса экономических специальностей.

Рассмотрим пример применения предложенной методики решения ЗОРР в условиях неопределенности.

Содержательная постановка задачи. Для предприятий торговли и общественного питания характерны кратковременные сезонные всплески торговли. Ярким примером является продажа школьных тетрадей в августе каждого года. На рис. 2 показан помесячный временной ряд выручки от продажи тетрадей за три года. Как следует из графика основной объем продаж наблюдается в августе.

Исходными данными задачи оптимизации товарного ассортимента являются все экономические и технические характеристики каждого товара, вместимость склада и сумма денег, доступная для закупки товара. Необходимо определить сколько тетрадей каждого вида следует запасти на складе для получения максимального дохода от их совокупной продажи в заданный момент времени. Очевидно, что распространенная детерминированная постановка ЗОРР [6] в указанных условиях есть ни что иное, как способ решить задачу не так как нужно, а так как можем.

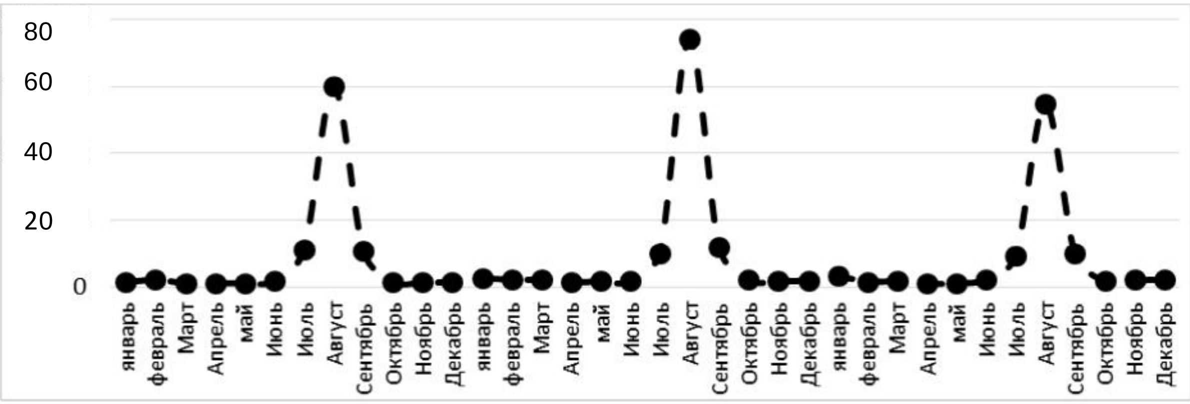

Рис. 2. Суммарный доход от продажи тетрадей (Построено автором)

Определение граничных значений для распределяемых ресурсов. График динамики продаж тетрадей, показанный на рис. 2, позволяет выбрать реально достижимый минимальный желаемый доход в 40 тыс. д.е. Желаемый максимальный доход не ограничен, но разумным следует признать доход порядка 70 тыс. д.е.

Ограничения на объемы закупаемого товара, на основе имеющегося опыта и указанного желаемого дохода, имеют следующие значения:

$$60 \le x_0 \le 90,\ 60 \le x_1 \le 90,\ 45 \le x_2 \le 80,\ 30 \le x_3 \le 40,$$
$$40 \le x_4 \le 50,\ 15 \le x_5 \le 35,\ 15 \le x_6 \le 45. \qquad (2)$$

В (2) $x_0 - x_6$ — количество закупаемых паков тетрадей на 12, 18, 24, 36, 48, 60 и 96 листов, соответственно. Ограничения (2) определяют ОДР задачи.

Выбор ФП для целевой функции и системы ограничений. С учетом этих оценок, получаем ФП для дохода от продаж тетрадей в планируемый период (рис. 3). S-образная ФП (сплошная кривая на рис. 3) описывает осторожный (пессимистичный) прогноз относительно продаж тетрадей. П-образная ФП «требует» получить конкретное значение дохода (в данном случае, максимальное). По оси абсцисс на рис. 3 отложены значения дохода.

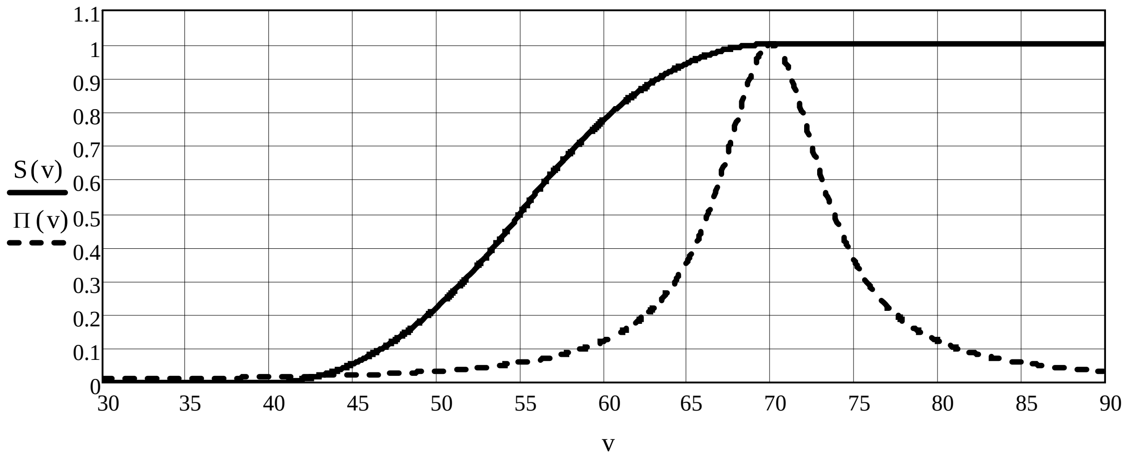

Рис. 3. Функции предпочтения для целевой функции задачи (Построено автором)

S-образная функция, график которой показан на рис. 3, описывается следующими выражением:

$$S(v) = \begin{cases} 0, \text{ если } v \le \alpha, \\ 2\left(\dfrac{v-\alpha}{\gamma-\alpha}\right)^2, \text{ если } \alpha < v \le \beta, \\ 1 - 2\left(\dfrac{v-\gamma}{\gamma-\alpha}\right)^2, \text{если } \beta < v \le \gamma, \\ 1, \text{ если } v > \gamma, \end{cases} \qquad (3)$$

где v — значение выручки, α — минимальное приемлемое значение дохода (для кривой, показанной на рис. 3, $\alpha = 40$), γ — максимальное (разумное) значение дохода $(\gamma = 70)$, $\beta = 0{,}5(\alpha + \gamma)$ — середина интервала роста ФП (точка перегиба).

П-образная ФП вычисляется по формуле

$$\Pi(v) = a / \left[a + b(v-a)^p\right], \qquad (4)$$

где *a* — максимальное значение выручки, *b* — вспомогательный коэффициент для настройки формы кривой, *p* — четное число, регулирующее степень сжатия кривой. Для кривой, показанной на рис. 3, $a = 70,\ b = 5,\ p = 2$.

Функции принадлежности искомых объемов продаж тетрадей, ограниченных неравенствами (2), описываются кривой (4). При этом параметр a следует взять равным середине соответствующего отрезка, параметр $b = 0{,}001$, параметр $p = 4$ для всех семи функций.

Формирование исследуемой на экстремум функции многих переменных. Исследуемую на экстремум функцию (1), вычисляем по следующему алгоритму:

1) задаем значения неизвестных из ОДР (2);

2) вычисляем функцию дохода по формуле $v(X) = \sum_{i=0}^{6} c_i x_i$, где c_i — доход от продажи одного пака i-го вида тетрадей;

3) подставляем $v(X)$ в (3) или (4), в зависимости от выбранной ФП для ЦФ;

4) вычисляем ФП по формуле (4) для каждого вида тетрадей по значениям неизвестных из п. 1;

5) определяем минимальное значение из всех полученных ФП (пересечение ФП).

Исследование на максимум функции (1). Процедура поиска оптимального решения ЗНМП сводится к максимизации пересечения функций принадлежности ЦФ и системы ограничений. Математически это выражается следующей формулой:

$$Xo = \arg\max \min_{X \in U}(G(X), \mu_1(x_1),..., \mu_7(x_7)), \quad (5)$$

где *U* — носитель множества допустимых решений задачи (в нашем случае — ОДР), $G(X)$ — ФП дохода от продажи всех товаров (у нас только одна), $\mu_i(x_i)$ — ФП *i*-го товара (в данном примере их семь).

В табл. 1 приведены решения задачи для вариантов ФП, показанных на рис. 3. Оптимальный план получен с использованием метода дифференциальной эволюции [2].

Таблица 1. Решения нечеткой задачи оптимизации ассортимента *

Тип ФП	Оптимальный план, шт.	Доход, д.е.
П	{80;80;69;38;48;30;32}	73213
S	{90;90;80;40;50;35;45}	83150

* Рассчитано автором

Экономическая интерпретация результатов решения задачи. Как следует из данных таблицы решение задачи оптимизации структуры товара в нечеткой постановке дает различные результаты для разных типов ФП. Так как мы задали не слишком высокое значение дохода в случае П-образной ФП, то модель нашла некое «среднее» решение из ОДР, обеспечивающее доход близкий к заданному (70 тыс. д.е.). В случае S-образной ФП, доход ограничивается только имеющимися ресурсами. Рекомендуемый моделью оптимальный план, в данном случае, может принять только ЛПР склонное к риску. Если риск оправдается, то доход предприятия окажется существенно выше.

В нечеткой постановке задачи учитывается экспертный прогноз изменения конъюнктуры рынка. Поэтому оптимальный план получается более правдоподобным с точки зрения ЛПР, так как именно ЛПР определяет вид ФП на этапе разработки математической модели задачи.

Расчеты показали, что на результаты решения задачи существенное влияние оказывают не только вид ФП для целевой функции, но и ФП для ограничений (2). Многообразие решений ЗНМП обеспечено всего лишь изменением ФП различных элементов модели. Это свидетельствует о мощности нечетко-множественного подхода к ЗОРР в условиях неопределенности. Заметим, что математическая модель может быть легко дополнена ограничениями на торговые и складские площади, финансовые, трудовые и другие ресурсы. Изменяя тип ФП для ЦФ можно легко превратить задачу на максимум ЦФ в задачу на ее минимум.

ВЫВОДЫ

1. Задачу оптимального распределения ресурсов в рыночных условиях целесообразно решать методами теории нечетких множеств.

2. В нечеткой постановке легко учесть конъюнктуру рынка и многокритериальность задач оптимального распределения ресурсов.

3. Использование функций предпочтения для целевых функций и затрат ресурсов позволяет учесть трудно формализуемые параметры социально-экономических систем.

4. Применение метаэвристических алгоритмов оптимизации обеспечивает определение глобального экстремума многоэкстремальных функций в режиме реального времени.

5. Разработанная методика решения нечетких задач математического программирования реализована в системе автоматизированных вычислений Mathcad и может использоваться специалистами с минимальной подготовкой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Koziel S. Computational Optimization, Methods and Algorithms / S. Koziel, X.-S. Yang (Eds.). — Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2011. — 289 p.

2. Price K.V. Differential Evolution. A Practical Approach to Global Optimization / K.V. Price, R.M. Storn, J.A. Lampinen. — Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. — 543 p.

3. Атанов С.К. Программные средства реализации адаптивных моделей с нечеткой логикой / С.К. Атанов. — [Электронный ресурс]. — Режим доступа: do.gendocs.ru/docs/index-82232.html (дата обращения 20.01.2016).

4. Беллман Р. Принятие решений в расплывчатых условиях // Р. Беллман, Л. Заде // В кн.: Вопросы анализа и процедуры принятия решений. — М.: Мир, 1976. — С. 172-215.

5. Зайченко Ю.П. Исследование операций: Нечеткая оптимизация: Учеб. Пособие / Ю.П. Зайченко. — К.: Выща шк., 1991. — 191 с.

6. Таха Х.А. Введение в исследование операций / Х.А. Таха. — М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. — 912 с.

Статья поступила в редакцию 2 февраля 2016 года